CÁLCULO INFINITESIMAL

Primer curso. Segundo examen parcial. 4 de junio de 2010.

APELLIDOS...NÚMERO...........
NOMBRE..

Primera pregunta. Cada uno de los apartados se calificará de 0 a 2 puntos. Un error considerado **muy grave** en alguno de los apartados puede hacer que la calificación global de la pregunta sea 0 puntos.
Responda breve y razonadamente

1. ¿Es convergente la integral impropia $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x^2}{\sqrt{x^9}} dx$?

   Debemos hallar k para que el límite $\displaystyle\lim_{x\to 0} x^k \frac{\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x^2}{x^{\frac{9}{2}}}$ sea distinto de 0 y ∞. Como $\operatorname{sen} x^2 =$ $= x^2 + R_4$ y $\operatorname{sen}^2 x = x^2 - \dfrac{x^4}{3} + R_4'$, tenemos

   $$\lim_{x\to 0} x^k \frac{\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x^2}{x^{\frac{9}{2}}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^k \left(-\frac{x^4}{3} - R_4 + R_4'\right)}{x^{\frac{9}{2}}} = -\frac{1}{3}$$

   si tomamos $k = \dfrac{1}{2}$ (el signo negativo se debe a que el integrando es negativo). Por tanto es convergente. Se puede hacer tambien mediante la regla de L'Hôpital, pero es más pesado.

2. Dada la función $f(x,y) = \dfrac{x + yx}{x^2 + y}$

   (a) Determinar $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ según la recta $x = 0$ y según la recta $y = 0$.

   (b) Dados los resultados anteriores, podemos asegurar la existencia de $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$?. Justificar la respuesta.

   (a) *Recta* $x = 0$*:* $f(0,y) = 0 \ \Rightarrow\ \displaystyle\lim_{y\to 0} f(0,y) = 0$

   Recta $y = 0$*:* $f(x,0) = \dfrac{1}{x} \ \Rightarrow$ no existe $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x,0)$

   (b) Si existiera el límite, los dos anteriores existirían y serían iguales. Por tanto, no existe el límite.

3. Ecuación del plano tangente a la superficie $x^2 + 2y^2 - 3z^2 = 14$ en el punto $(x,y,z) = (3,2,-1)$

   Sea $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 - 3z^2 - 14$. Entonces, $\operatorname{grad} f(x,y,z) = (2x, 4y, -6z)$y asi $\operatorname{grad} f(3,2,-1) =$ $= (6,8,6)$. El plano tangente es $(6,8,6)\cdot(x-3, y-2, z+1) = 0$, esto es $3x + 4y + 3z = 14$.

4. Contestar V o F a las siguientes afirmaciones:

V (a) Sea $f(x,y)$ una función de clas $C^{(+\infty}$ definida en $\mathbf{R}^2$ con polinomio de Taylor de orden 2 en el punto $(2,3)$

$$3+2(x-2)+(x-2)^2+3(y-3)^2+2(x-2)(y-3)$$

y $g(x,y)=f(x,y)-2(x-2)$. Entonces $g(x,y)$ tiene un mínimo relativo en $(2,3)$.

F (b) Sea $f(x,y)$ diferenciable en un abierto A que contiene al punto $(1,0)$. Si $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}>0$, f tiene un mínimo relativo en $(1,0)$.

V (c) Sea $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ con $f(0,0)=0$. Entonces $g(x,y)=|f(x,y)|$ tiene un mínimo absoluto en $(0,0)$.

F (d) Dada $f(x,y)$, si f tiene en (x_0,y_0) un extremo relativo condicionado a $g(x,y)=0$, entonces f tiene un extremo relativo en (x_0,y_0).

(a) El polinomio de $g(x,y)$ es $3+(x-2)^2+3(y-3)^2+2(x-2)(y-3)$, por lo que las derivadas primeras se anulan y es punto crítico. Además como el hessiano es $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$, g tiene un mínimo.

(b) Ni siquiera sabemos que sea un punto crítico.

(c) $g(x,y)\geq 0\ \forall\,(x,y)$ y como $g(0,0)=0$, la conclusión es evidente.

(d) No tiene por que ser ni siquiera punto crítico.

5. ¿Qué variables podemos asegurar que define la relación

$$x^2e^y+z\operatorname{sen}y+e^z=1$$

como funciones implícitas del resto en un entorno del punto $(x,y,z)=(0,0,0)$.

Si $f(x,y,z)=^2 e^y+z\operatorname{sen}y+e^z-1$, $f(0,0,0)=0$. Además las derivadas parciales son $\dfrac{\partial f}{\partial x}=2xe^y \quad \dfrac{\partial f}{\partial y}=x^2e^y+z\cos y \quad \dfrac{\partial f}{\partial z}=\operatorname{sen}y+e^z$, que son continuas por ser combinación de polinomios, exponencial y funciones circulares. Asi f es diferenciable. La matriz Jacobiana en $(0,0,0)$ es $(0\ \ 0\ \ 1)$. Se sigue que sólo podemos asegurar que z es función implícita diferenciable de (x,y).

CÁLCULO INFINITESIMAL

Primer curso. Segundo examen parcial. 4 de junio de 2010.

APELLIDOS..NÚMERO..........
NOMBRE..

Segunda pregunta. Un error considerado **muy grave** puede hacer que la calificación global de la pregunta sea 0 puntos.

Dada la serie de potencias $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{4^n n(n+1)}$, hallar:

1. Radio de convergencia.
2. Convergencia en los extremos.
3. Suma de la serie.
4. Suma de la serie en los extremos del intervalo.

1. $\displaystyle\lim_n \frac{\frac{|x|^{n+1}}{4^n n(n+1)}}{\frac{|x|^n}{4^{n-1}(n-1)n}} = \lim_n \frac{|x|}{4}\frac{n-1}{n+1} = \frac{|x|}{4} < 1 \;\Rightarrow\; |x| < 4$, por lo que el radio de convergencia es 4 y el intervalo, en principio, es $(-4,4)$

2. $x=4$: $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^{n+1}}{4^n n(n+1)} = 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ que converge (absolutamente).

   $x=-4$: $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}4^{n+1}}{4^n n(n+1)} = 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}$ que converge absolutamente.

3. Los cambios de orden que se van a realizar entre los simbolos de integral y sumatorio pueden hacerse al tratarse de una serie de potencias en su intervalo de convergencia.

   $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{4^n n(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4^n n}\int x^n\,dx = \int\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{4^n n}\right)dx$. Procedemos ahora a sumar $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{4^n n}$.

   $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{4^n n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4^n}\int x^{n-1}\,dx = \frac{1}{4}\int\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n-1}}{4^{n-1}}\right)dx = \frac{1}{4}\int\frac{1}{1-\frac{x}{4}}\,dx = \int\frac{1}{4-x}\,dx =$

   $= -\ln(4-x)+C$. Evaluando en $x=0$, $C=\ln 4$ y asi $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{4^n n} = \ln 4 - \ln(4-x)$. Tenemos ahora

   $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{4^n n(n+1)} = \int(\ln 4 - \ln(4-x))\,dx$, integral que se resuelve mediante una elemental integración por partes. La función suma es $f(x) = x + (x-4)\ln\dfrac{4}{4-x}$.

4. En $x=-4$ la suma es $f(-4) = -4 + 8\ln 2$

   En $x=4$ podemos proceder de dos formas:

- Evaluando $f(4)$, lo que exige calcular $\lim\limits_{x\to 4}(4-x)\ln(4-x) = \lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\ln(4-x)}{\frac{1}{4-x}} = 0$ por la regla de L'Hôpital. Asi la suma es 4.
- Sumando $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$. Como $S_n = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} =$ $= 1 - \dfrac{1}{n+1}$, $\quad \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$

CÁLCULO INFINITESIMAL

Primer curso. Segundo examen parcial. 4 de junio de 2010.

APELLIDOS..NÚMERO..........
NOMBRE..

Tercera pregunta. Un error considerado **muy grave** puede hacer que la calificación global de la pregunta sea 0 puntos.

Sea $f(x,y) = (x^2-y^2, x+y^2, x^2-y^3)$ y $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ tal que $\text{grad} g(u,v,w) = (\frac{3}{2}, -6, 1)$ en todo punto (u,v,w). Se considera $h = g \circ f$.

1. Sabiendo que $g(-3,5,-7) = 6$, hallar $h(1'01, 2'03)$ mediante una aproximación lineal.
2. Si una persona se encuentra en el punto $(1,2,h(1,2))$ de la superficie $z = h(x,y)$ y se mueve según $\vec{v} = (1,1)$, ¿Ascenderá o descenderá?.
3. Caracterizar los extremos relativos de $l(x,y) = \dfrac{x^3}{3} + h(x,y) + 5$

1. Como $\text{grad} g(u,v,w) = (\frac{3}{2}, -6, 1)$ en todo punto, la función g es $g(u,v,w) = \frac{3}{2}u - 6v + w + C$ y como $g(-3,5,-7) = 6$, $C = \dfrac{95}{2}$, por lo que $g(u,v,w) = \dfrac{3}{2}u - 6v + w + \dfrac{95}{2}$. Componiendo las funciones,
$$h(x,y) = -6x + \frac{5}{2}x^2 - \frac{15}{2}y^2 - y^3 + \frac{95}{2}$$
Asi $h(1,2) = 6$, $\quad \dfrac{\partial h}{\partial x} = -6 + 5x \ \Rightarrow\ \dfrac{\partial h}{\partial x}(1,2) = -1$, $\quad \dfrac{\partial h}{\partial y} = -15y - 3y^2 \ \Rightarrow\ \dfrac{\partial h}{\partial y}(1,2) = -42$
$h(x,y) \sim 6 - (x-1) - 42(y-2) \ \Rightarrow\ h(1'01, 2'03) \sim 4'73$
2. La derivada direccional es $(-1,-42) \cdot \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\dfrac{43}{\sqrt{2}} < 0$, luego desciende.
3. $l(x,y) = -6x + \dfrac{5}{2}x^2 + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{15}{2}y^2 - y^3 + \dfrac{105}{2}$. Asi
$\dfrac{\partial l}{\partial x} = -6 + 5x + x^2 = 0 \ \Rightarrow\ x = 1, -6$
$\dfrac{\partial l}{\partial y} = -15y - 3y^2 = 0 \ \Rightarrow\ y = 0, -5$
por lo que los puntos críticos son $(1,0)$, $(1,-5)$, $(-6,0)$ y $(-6,-5)$. Además
$$\frac{\partial^2 l}{\partial x^2} = 5 + 2x, \quad \frac{\partial^2 l}{\partial y^2} = -15 - 6y, \quad \frac{\partial^2 l}{\partial x \partial y} = 0$$
y, por tanto,
$H(1,0) = \begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -15 \end{vmatrix} < 0 \qquad$ Punto de silla.

$$H(1,-5) = \begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 15 \end{vmatrix} > 0 \qquad \text{Mínimo.}$$

$$H(-6,0) = \begin{vmatrix} -7 & 0 \\ 0 & -15 \end{vmatrix} > 0 \qquad \text{Máximo.}$$

$$H(-6,-5) = \begin{vmatrix} -7 & 0 \\ 0 & 15 \end{vmatrix} < 0 \qquad \text{Punto de silla.}$$

CÁLCULO INFINITESIMAL

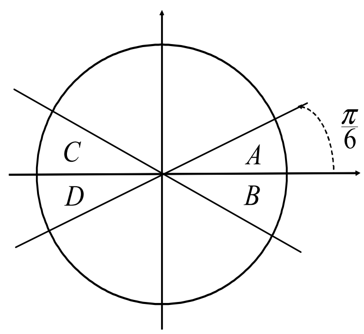
Primer curso. Segundo examen parcial. 4 de junio de 2010.

APELLIDOS...NÚMERO..........
NOMBRE..

Cuarta pregunta. Un error considerado **muy grave** puede hacer que la calificación global de la pregunta sea 0 puntos.

Hallar el volumen de la región del espacio definida por las sguientes desigualdades:

$$\begin{cases} z \geq \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 \\ z \leq x^2 - y^2 \\ x^2 + y^2 \leq 4 \end{cases}$$



Eliminando z entre las dos primeras funciones
$\dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{2}y^2 = x^2 - y^2$
$3y^2 = x^2$ y asi $y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$ que son las dos rectas que aparecen en la figura. El círculo corresponde a $x^2 + y^2 = 4$. Evaluando en los distintos sectores se comprueba que la proyección del cuerpo es $A \cup B \cup C \cup D$ y por la simetría del domino y la función, basta integrar sobre A y multiplicar por 4.

Con el cambio a coordenadas polares, el volumen es

$$V = 4 \iint_A \left(x^2 - y^2 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)\right) dx\,dy = 4\int_0^{\frac{\pi}{6}} d\varphi \int_0^2 \left(\rho^2\cos^2\varphi - \rho^2\operatorname{sen}^2\varphi - \frac{1}{2}\rho^2\right)\rho\,d\rho =$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\cos(2\varphi) - \frac{1}{2}\right) d\varphi \int_0^2 \rho^3\,d\rho = 4\sqrt{3} - \frac{4\pi}{3}$$